Propper
060821
Kap 3

Lös ekvationen

[3.2]

b) $x^4 = 256 = 128 \cdot 2 = 64 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \cdot 2^4 = 2^8$

$x = \pm \sqrt[4]{2^8} = \pm 2^{8 \cdot 1/4} = \pm 2^2 = \pm 4$

[3.3] Beräkna

g) $\sqrt[8]{(-2)^8} = \sqrt[8]{2^8} = 2^{8 \cdot 1/8} = 2^1 = 2$

[3.4] Förenkla

c) $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{64}{2}} = \left(\frac{64}{2}\right)^{1/5} = (32)^{1/5} = (2^5)^{1/5} = 2^{5/5} = 2^1 = 2$

Vi vet att $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

e) $4 \cdot \sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{-375} = 4 \cdot \sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3 \cdot 8} + \sqrt[3]{-3 \cdot 5^3}$

$= 4\sqrt[3]{3} + 3 \cdot 2\sqrt[3]{3} - 5 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}(4 + 6 - 5) = 5 \cdot \sqrt[3]{3}$

f) $\sqrt[6]{25} - \sqrt[3]{-5} + \sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[5]{-100000}} = 25^{1/6} + 5^{3} + (4 \cdot (-10^5)^{1/5})^{1/3}$

$= (5 \cdot 5)^{1/6} + 5^{1/3} + 2^{2/3} \cdot (-10)^{1/3} = 5^{1/3} + 5^{1/3} - 2^{2/3}(2 \cdot 5)^{1/3}$

$= 2 \cdot 5^{1/3} - 2^{2/3} \cdot 2^{1/3} \cdot 5^{1/3} = 2 \cdot 5^{1/3} - 2 \cdot 5^{1/3} = 0$

[3.6] Beräkna

g) $(8000^5)^{1/15} = (8000)^{5/15} = (8000)^{1/3} = (8 \cdot 10^3)^{1/3} = (2^3 \cdot 10^3)^{1/3}$

$= (2 \cdot 10)^{3/3} = 2 \cdot 10 = 20$

[3.7] Skriv som potens av a

a) $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{a^5}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{a^{5/7}}\right)^{-1} = \left(a^{-5/7}\right)^{-1} = a^{5/7}$

[3.8] Skriv på rotform

a) $a^{2/5} = \sqrt[5]{a^2}$

c) $a^{-3/4} = \frac{1}{a^{3/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

[3.10] Skriv som en potens av a

g) $\sqrt[4]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt{a} = a^{1/4} a^{1/3} \cdot a^{1/2} = a^{1/4 + 1/3 + 1/2} = a^{(3+4+6)/12} = a^{13/12}$

$\Longrightarrow$

[3.14] Lös ekvationen

a) $2^x + 2^{x+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x = \frac{3}{2}$

sätt $2^x = t$ då fås $t + 2t = \frac{3}{2}$

$3t = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ eftersom $t = 2^x$ fås $2^x = \frac{1}{2}$ eller

$2^x = 2^{-1}$ vi ser nu att $x = -1$

c) $6^{x+1} + 6^{3-x} = 222 \Rightarrow 6 \cdot 6^x + 6^3 \cdot 6^{-x} = 222$ Vi multiplicerar med 6^x

$6 \cdot 6^x \cdot 6^x + 6^3 \cdot \underbrace{6^{-x} \cdot 6^x}_{=1} = 222 \cdot 6^x$

$6 \cdot 6^{2x} - 222\,6^x + 6^3 = 0$

$6^{2x} - 37\,6^x + 36 = 0$ sätt $t = 6^x$ då fås

$t^2 - 37t + 36 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{37}{2} \pm \sqrt{\frac{37^2}{4} - \frac{36 \cdot 4}{4}} = \frac{37}{2} \pm \frac{35}{2}$

$t_1 = 36 = 6^2$

$t_2 = 1 = 6^0$ Då har vi att

$6^x = t_1 = 6^2$ och detta ger att $\underline{x = 2}$ eller

$6^x = t_2 = 6^0$ vilket ger $\underline{x = 0}$

[3.15] Bestäm

b) $\lg 0.01 = \lg 10^{-2} = -2$

c) $\lg 10^{-\pi} = -\pi$

[3.16] Bestäm

b) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

c) $\ln \sqrt{e} = \ln e^{1/2} = 1/2$

[3.17] Lös ekvationen

a) $\log_a x = \frac{1}{2}$ $a^{\log_a x} = a^{1/2} \Rightarrow x = a^{1/2} = \sqrt{a}$

c) $3 \ln x = 2 \Rightarrow \ln x = \frac{2}{3} \Rightarrow e^{\ln x} = e^{2/3} \Rightarrow x = e^{2/3}$

[3.18] Bestäm

a) $\log_4 \frac{5}{3} + \log_4 \frac{3}{5} = \log_4 \left(\frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 5}\right) = \log_4 1 = \log_4 1^0 = 0 \cdot \log_4 1 = 0$

b) $\ln \frac{1}{e} + 2 \ln \sqrt{e} = \ln e^{-1} + 2 \ln e^{1/2} = \ln e^{-1} + \ln e^1 = -1 + 1 = 0$

f) $\frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3 \log_2 2}{2 \log_2 2} = \frac{3}{2}$

Proppen 060821 Kap 3

Skriv som en logaritm

[3.20]

a) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{2}{3}\ln(x^2-1)^{3/4} = \ln(x^2+1)^{1/2}+\ln(x^2-1)^{3/4\cdot 2/3}$

$= \ln(x^2+1)^{1/2}+\ln(x^2-1)^{1/2} = \ln((x^2+1)(x^2-1))^{1/2}$

$= \ln\sqrt{x^4-1}$

[3.22] Skriv på e-bas, dvs på formen e^a

a) $\sqrt[3]{5} = 5^{1/3} = e^{\ln 5^{1/3}} = e^{\frac{\ln 5}{3}}$

[3.23] Lös ekvationen

d) $(\ln x)^2 = \ln x^2 \Rightarrow \ln x \cdot \ln x = 2\ln x$

$\ln x(\ln x - 2) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$

$\ln x - 2 = 0 \Rightarrow x = e^2$

e) $\sqrt{\ln x} = \ln\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{\ln x} = \ln x^{1/2}$

$\sqrt{\ln x} = \frac{1}{2}\ln x \Rightarrow \ln x = \frac{1}{4}(\ln x)^2 \Rightarrow \ln x\left(\frac{1}{4}\ln x - 1\right) = 0$

$\ln x = 0$ eller $\Rightarrow x = 1$

$\frac{1}{4}\ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 4 \Rightarrow x = e^4$

f) $\ln x + \ln x^2 + \ln x^3 + \ln x^4 + \ln x^5 = 5$

$\ln x + 2\ln x + 3\ln x + 4\ln x + 5\ln x = 5$

$15\ln x = 5$

$\ln x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$

[3.24] Lös ekvationen

a) $5^{3x}\cdot 2^x = \sqrt{250}$

$5^{x+x+x}\cdot 2^x = \sqrt{250} \Rightarrow 5^x\cdot 5^x\cdot 5^x\cdot 2^x = \sqrt{250} \Rightarrow (5\cdot 5\cdot 5\cdot 2)^x = \sqrt{250}$

$(10\cdot 5^2)^x = 250^{1/2} \Rightarrow 250^x = 250^{1/2} \Rightarrow x = 1/2$

b) $2^x\cdot 4^{1-x} = 5^{2-x} \Rightarrow 2^x\cdot 4^1\cdot 4^{-x} = 5^2\cdot 5^{-x}$

$\frac{2^x}{4^x}\cdot 4 = \frac{25}{5^x} \Rightarrow \frac{2^x\cdot 5^x}{4^x} = \frac{25}{4} \Rightarrow \left(\frac{2\cdot 5}{4}\right)^x = \frac{25}{4}$

$\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{5^2}{2^2} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow \underline{\underline{x = 2}}$

$\Longrightarrow$

[3.36] Sönderfallet av radioaktiva grundämnen sker enligt formeln

$m(t) = m(0)\,e^{-\lambda t}$ där $m(0)$ är den ursprungliga viktsmängden av ämnet, $m(t)$ den mängd som finns kvar vid tiden t och λ en positiv konstant som är karaktäristisk för ämnet (sönderfallskonstanten). Med halveringstiden T för ett radioaktivt ämne menas den tid det tar innan hälften av den ursprungliga mängden sönderfallit.

a) Uttryck λ i halveringstiden T

Vi har formeln $m(t) = m(0)\,e^{-\lambda t}$ och om $t = T$ fås

$$m(T) = m(0)\,e^{-\lambda T} \Rightarrow \frac{m(0)}{2} = m(0)\,e^{-\lambda T}$$

Eftersom $m(T) = \dfrac{m(0)}{2}$ } dvs hälften av den ursprungliga mängden $m(0)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda T} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\lambda T}$$

$$\underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 2 = -\lambda T \Rightarrow \ln 2 = \lambda T$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$
