Proppen
050817
Kap 2

Skriv som polynom på formen $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

[2.1]

c) $(2x+1)(4x^2-2x+1) = 8x^3-4x^2+2x+4x^2-2x+1 = 8x^3+1$

[2.2] Ange graden av $p(x)$ då

b) $p(x) = 1+x^2-(1+x)^2 = 1+x^2-(1+2x+x^2) = 1+x^2-1-2x-x^2 = -2x^1$ graden

$p(x)$ är av första graden

[2.3] Skriv som en kvot mellan två polynom

a) $$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1\cdot(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}$$

d) $$\frac{x+2}{x-3} - \frac{x-3}{x+4} = \frac{(x+2)(x+4)-(x-3)^2}{(x-3)(x+4)} = \frac{x^2+4x+2x+8-(x^2-6x+9)}{x^2+4x-3x-12}$$

$$= \frac{12x-1}{x^2+x-12}$$

g) $$\frac{1}{x^2-2x} + \frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-2}{x(x-2)} + \frac{x^2-2x}{x(x-2)} = \frac{1+x-2+x^2-2x}{x(x-2)}$$

$$= \frac{x^2-x-1}{x(x-2)} = \frac{x^2-x-1}{x^2-2x}$$

[2.5] Utför divisionen och ange kvot och rest:

a) $$\frac{x^2-3x+7}{x-2}$$

$$\begin{array}{rrrl} & x & -1 & \\ \hline x^2 & -3x & +7 & \lfloor x-2 \\ x^2 & -2x & & \\ \hline & -x & & \\ & -x & +2 & \\ \hline & & 5 & \end{array}$$

Svar: kvot: $x-1$, rest: 5

c) $$\frac{x^4+x}{x^4-1}$$

$$\begin{array}{rrl} 1 & & \\ \hline x^4 & +x & \lfloor x^4-1 \\ x^4 & -1 & \\ \hline x & +1 & \end{array}$$

Svar: kvot: 1, rest: $x+1$

[2.6] Lös ekvationen (endast rötternas exakta värden ska anges)

a) $x^2+3x-10=0$

$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+10} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9+40}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$

$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{10}{2} = -5$

c) $x^2-3x+1=0$

$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-1} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-\frac{4}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ eller $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

[2.8] Lös ekvationen

a) $8(2x-3)(7x+11)=0$ Vi multiplicerar med 1/8 på HL och VL

$(2x-3)(7x+11)=0$

$2x-3=0$ eller $7x+11=0$

$x=3/2$ eller $x=-11/7$

b) $15x^2=16x$

$15x^2-16x=0$ Vi bryter ut x

$x(15x-16)=0$

$\underline{\underline{x=0}}$ eller $15x-16=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=16/15}}$

[2.10] Lös ekvationen

b) $x^3+2x^2-1=0$ Vi gissar en rot. Insättning visar att $x=-1$ (eller $x+1=0$) satisfierar ekvationen

$$\begin{array}{r|l} x^2+x-1 & \\ \hline x^3+2x^2-1 & x+1 \\ -(x^3+x^2) & \\ \hline x^2 & \\ x^2+x & \\ \hline -x-1 & \\ -x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow x^3+2x^2-1=(x+1)(x^2+x-1)=0$

Vi löser $x^2+x-1=0$ för att få tag i dem sista rötterna

$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Svar: $x_1=-1$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ eller $x_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Proppen
060818
Kap 2

[2.11] Dela upp följande polynom i faktorer

c) x^3+2x^2-x-2

Antag att uttrycket blir noll. Då kan vi använda samma metod som i föregående uppgift dvs, där vi gissar en rot.

$x^3+2x^2-x-2=0$ roten $x=1$ satisfierar ekvationen

$$\begin{array}{l}
\quad x^2+3x+2 \\
\hline
x^3+2x^2-x-2 \quad \boxed{x-1} \\
x^3-x^2 \\
\hline
\quad 3x^2-x \\
\quad 3x^2-3x \\
\hline
\qquad 2x-2 \\
\qquad 2x-2 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
\Bigg\} \Rightarrow x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x^2+3x+2)$$

Vi måste nu faktorisera uttrycket x^2+3x+2

Antag att den blir noll dvs

$x^2+3x+2=0$ Vi löser detta som en vanlig andragradare för att få rötterna, för att senare kunna faktorisera.

$X_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}=\frac{-3}{2}\pm\frac{1}{2}$ $\quad x_1=-\frac{3+1}{2}=-1$

$x_2=\frac{-3-1}{2}=-2$

Då får vi:

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$

[2.15] Lös rotekvationen

a) $\sqrt{x}-1=\sqrt{x-9}$ vi kvadrerar båda leden

$(\sqrt{x}-1)^2=(\sqrt{x-9})^{1/2}$

$x-2\sqrt{x}+1=x-9$

$x-x-2\sqrt{x}=-9-1$

$-2\sqrt{x}=-10$

$2\sqrt{x}=10$

$\sqrt{x}=5$

$x=5^2$

$x=25$

b) $3 \cdot \sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$ Vi kvadrerar båda leden

$(3\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1})^2 = 2^2$

$3^2 \cdot (\sqrt{x-1})^2 + 6\sqrt{x-1}\sqrt{3x+1} + (\sqrt{3x+1})^2 = 2^2$ jämför med $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

$9 \cdot (x-1) + 6\sqrt{(x-1)(3x+1)} + 3x+1 = 4$

$9x - 9 + 6\sqrt{3x^2+x-3x-1} + 3x+1 = 4$

$12x - 12 + 6\sqrt{3x^2-2x-1} = 0$ Vi delar med 6 överallt

$2x - 2 + \sqrt{3x^2-2x-1} = 0$

$\sqrt{3x^2-2x-1} = 2-2x$ Vi kvadrerar båda leden

$3x^2 - 2x - 1 = (2-2x)^2$

$3x^2 - 2x - 1 = 4 + 4x^2 - 8x$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2$ $x_1 = 5$

$x_2 = 1$

Prövning i den ursprungliga ekvationen $3\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$ slutligen.

För $x_1 = 5$

$3 \cdot \sqrt{5-1} + \sqrt{3 \cdot 5+1} = 3 \cdot 2 + 4 = 10 \neq 2$ slutsats $x_1 = 5$ är inte en rot

För $x_2 = 1$

$3 \cdot \sqrt{1-1} + \sqrt{3 \cdot 1+1} = 0 + \sqrt{4} = 2$ slutsats $x_2 = 1$ är en rot

Svar: Enadst en rot vid $x = 1$

[2.16] Bestäm alla x för vilka gäller

a) $2(x-1)(x+2) < 0$ dela med 2 överallt

$(x-1)(x+2) < 0$

	-3	-2	-1	0	1	2	x
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$(x-1)(x+2)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	

samma tecken ger +
olika tecken ger −
multiplikation med 0 ger 0

$\underline{\underline{-2 < x < 1}}$ för att uttrycket ska var mindre än noll

Jämför med
$(+1) \cdot (+1) = +1$
$(-1) \cdot (-1) = +1$
$(-1) \cdot (+1) = -1$
$0 \cdot 1 = 0$

Proppen
060819
Kap 2

[2.16] b) $(1-2x)(x+2) > 0$

Vi bryter ut -1 ur $(1-2x) = -(2x-1)$
Vi bryter ut 2 ur $-(2x-1) = -2(x-1/2)$
dvs $(1-2x) = -(2x-1) = -2(x-1/2)$

$(1-2x)(x+2) = -2(x-1/2)(x+2) > 0$ då fås att

$(x-1/2)(x+2) < 0$ då vi delar med -2 överallt.
När man multiplicerar eller delar överallt med ett minus tal (t.ex -2) så ändras tecknet "$>$" till "$<$"

Vi gör nu ett s.k teckenschema för ekvationen
$(x-1/2)(x+2) < 0$

	-3	-2	-1	0	$+1/2$	$+1$	x
$x-1/2$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$(x-1/2)(x+2)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	

Alltså uttrycket $(x-1/2)(x+2)$ blir mindre än noll (<0) då x ligger mellan -2 och $1/2$ $(-2 < x < 1/2)$

[2.17] För vilka x gäller olikheten

a) $x^3-3x^2+2x > 0$

Vi börjar med att faktorisera VL

$$x^3-3x^2+2x = x(\underbrace{x^2-3x+2})$$

vi löser ut rötterna till uttrycket för att kunna faktorisera vidare. $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

$x_1 = 2$ och $x_2 = 1$

Då får vi att

$$x^3-3x^2+2x = x(x-1)(x-2) > 0$$

$\Longrightarrow$

Vi ställer upp ett teckenschema;

	−1	0	1	2	3	x
x	−	0	+	+	+	
$x-1$	−	−	0	+	+	
$x-2$	−	−	−	0	+	
$x(x-1)(x-2)$	−	0	0	0	+	

← jämför med $(-1)(-1)(-1)=-1$
$(+1)(+1)(+1)=+1$
$0\cdot(-1)(-1)=0$
osv.

Ekvationen $x(x-1)(x-2)>0$ om

$0<x<1$ eller $x>2$

[2.18] Lös olikheten

a) $\frac{1}{x} < 2x-1$

x i nämnaren kan anta negativa värden också och då "vänds" olikheten vid multiplikation med ett negativt tal. Vi ska därför inte multiplicera olikhetens båda led med x för att få bort x:et i nämnaren.

$0 < 2x-1-\frac{1}{x} = 2(x^2-x/2-1/2)$

Vi faktoriserar vänsterledet: $x^2-x/2-1/2=0$ ger rötterna
$x_1=1$ och $x_2=-1/2$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{2(x-1)(x+1/2)}{x}$

Teckenschema:

	−1	−1/2	0	1	2	x
2	+	+	+	+	+	
$(x-1)$	−	−	−	0	+	
$(x+1/2)$	−	0	+	+	+	
$\frac{1}{x}$	−	−	ej def	+	+	
$2(x-1)(x+1/2)\cdot\frac{1}{x}$	... −	0	ej def	+	+	

$\underbrace{\quad}_{-\frac{1}{2}<x<0}$ $\underbrace{\quad}_{x>1}$

Svar: $-\frac{1}{2}<x<0$ eller $x>1$

Proppen
060821
Kap 2
[2.18]

b) $\dfrac{4x}{x+1} \leq x^2 - 2x$

$0 \leq x^2 - 2x - \dfrac{4x}{x+1}$

$0 \leq \dfrac{x^2(x+1)}{x+1} - \dfrac{2x(x+1)}{x+1} - \dfrac{4x}{x+1}$

$0 \leq \dfrac{x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 4x}{x+1}$

faktorisera!

$0 \leq \dfrac{x^3 - x^2 - 6x}{x+1} = \dfrac{x(x^2 - x - 6)}{x+1}$

$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}$

$= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -2$

$0 \leq \dfrac{x(x+2)(x-3)}{x+1}$

Teckenschema:

	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-	-	-	0	+	+	+	+
$(x+2)$	-	0	+	+	+	+	+	+
$(x-3)$	-	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{1}{x+1}$	-	-	ej def.	+	+	+	+	+
$x(x+2)(x-3) \cdot \frac{1}{x+1}$	+	0	ej def.	0	-	-	0	+

: x

För att $\dfrac{x(x+2)(x-3)}{x+1}$ ska bli större eller lika med noll

måste $x \leq -2$ eller $-1 < x \leq 0$ eller $x \geq 3$

$\Longrightarrow$

[2.19] Ange

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

a) $|2| = 2$

b) $|-2| = 2$

c) $|0| = 0$

[2.20] Bestäm med hjälp av avståndstolkning, alla x som uppfyller olikheten

b) $|x-3| < 2 \Rightarrow -2 < x-3 < 2$

$3-2 < x-3+3 < 2+3$

$\underline{1 < x < 5}$

c) $|x+1| < 2 \Rightarrow -2 < x+1 < 2 \Rightarrow \underline{\underline{-3 < x < 1}}$

[2.21] skriv som en olikhet av typen $|x-a| < b$

a) $5 < x < 7$: Mittpunkten är $\frac{5+7}{2} = 6$

Intervallets längd är $7-5 = 2 = 2 \cdot \frac{2}{2} = 2 \cdot 1$

olikheten kan skrivas : $|x-6| < 1$

c) $-2 < x < 5$ Mittpunkten är $\frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$

Intervallets längd är $5-(-2) = 7 = 2 \cdot \frac{7}{2}$

olikheten kan skrivas : $|x - \frac{3}{2}| < \frac{7}{2}$

[2.22] Lös ekvationen

a) $|x-3| + x = 5 \Rightarrow |x-3| = 5-x$ Om $|x-3| \geq 0$ fås $x-3 \geq 0$ och $x \geq 3$

$x-3 = 5-x \Rightarrow \underline{x=4}$ är en lösning

Om $|x-3| < 0$ fås $-(x-3) < 0$ och $x > 3$ och $-(x-3) - x = 5 \Rightarrow 0 \neq 2$ ingen lösning

---

[2.23] Lös olikheten

a) $|x-5| + x \leq 7$

$$|x-5| = \begin{cases} x-5 & \text{om } x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \\ -(x-5) & \text{om } x-5 < 0 \quad x < 5 \end{cases}$$

5 (x)

$x < 5$	$x \geq 5$
$-(x-5) + x \leq 7$	$x-5+x \leq 7$
$-x+5+x \leq 7$	$2x \leq 12$
$0 \not\leq 2$	$\underline{\underline{x \leq 6}}$
ingen lösning	